



KARAKTERISTIK ALIRAN TAK TUNAK DAN PERPINDAHAN PANAS FLUIDA SISCO PADA PIPA ANULUS VERTIKAL

Oleh:

Sestika Wijiningutami

1211 100 038

Dosen Pembimbing :

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc

Drs. Kamiran, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER

SURABAYA

2015

ABSTRAK

Fluida sisko merupakan salah satu fluida non-Newtonian yang mempunyai karakteristik Bingham Plastik. Permasalahannya adalah fluida ini tidak dapat mengalir tanpa adanya energi panas yang diberikan sebelum dialirkan dalam pipa. Pada Tugas Akhir ini, dikaji bagaimana karakteristik aliran tak tunak dan perpindahan panas fluida sisko pada pipa annulus vertikal. Model matematis dari aliran fluida sisko dikembangkan dari Persamaan kontinuitas, momentum, dan Persamaan panas. Model yang diperoleh berupa Persamaan Differensial Parsial (PDP). Kemudian, Persamaan tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode beda hingga implisit Crank-Nicholson. Dari simulasi diperoleh bahwa kecepatan fluida sisko lebih kecil daripada fluida Newtonian. Tetapi temperatur fluida sisko lebih besar daripada fluida Newtonian. Selain itu, semakin besar waktu yang diberikan kepada kedua fluida, kecepatannya semakin besar dan temperaturnya semakin kecil. Dengan demikian terlihat bahwa profil kecepatan dan temperatur fluida sisko dipengaruhi oleh besarnya waktu yang diberikan dan nilai parameter material, selain itu distribusi temperatur juga dipengaruhi oleh bilangan Brinkman.



PENDAHULUAN

Latar Belakang

Penggunaan Fluida pada Bidang Industri

Fluida Sisko adalah Salah Satu Fluida Non-Newtonian

Menentukan Model Matematika dari aliran fluida sisko

Menyelesaikan Model Secara Numerik

Menampilkan penyelesaian dalam bentuk grafik

Mendapatkan karakteristik kecepatan dan perpindahan panas dari aliran

RUMUSAN MASALAH

Bagaimana karakteristik dari aliran tak tunak dan perpindahan panas fluida sisko pada pipa Annulus vertikal dengan menggunakan metode beda hingga implisit Crank-Nicholson?



Batasan Masalah



Jenis aliran yang diteliti adalah aliran laminar.

Model aliran yang digunakan adalah model aliran tak tunak fluida sisko pada pipa dengan panjang L dan diameter D .

Kajian yang digunakan adalah model tiga dimensi pada koordinat silinder.

Power index yang digunakan adalah $n = 0$ dan $n = 1$.

Metode numerik yang dipakai adalah metode beda hingga implicit *Crank-Nicholson*.

Laju aliran fluida sisko pada pipa akan disimulasikan dengan menggunakan software Matlab.

ASUMSI MASALAH

- Pipa lurus vertikal. Dengan aliran bergerak dari bawah ke atas secara laminar.
- Luas penampang pipa konstan.
- Pipa berbentuk annulus dengan pusat sama.
- Kedua pipa dalam keadaan diam. Sehingga tidak ada gesekan antara kedua pipa.
- Variable bebas yang berpengaruh adalah jari-jari pipa dan waktu.
- Kecepatan dan temperatur merupakan fungsi jari-jari dan waktu.



TUJUAN

Mengetahui karakteristik dari aliran tak tunak dan perpindahan panas fluida sisko pada pipa Annulus vertikal dengan menggunakan metode beda hingga implisit Crank-Nicholson.



Manfaat

- Mengetahui tentang aplikasi matematika pada industri khususnya di bidang fluida.
- Mengetahui tentang aplikasi numerik pada permasalahan laju aliran tak tunak dan perpindahan panas fluida sisko pada pipa menggunakan metode beda hingga.

TINJAUAN PUSTAKA

FLUIDA

- Fluida dibagi menjadi 2, yaitu fluida newtonian dan fluida non newtonian. Fluida sisko merupakan salah satu fluida yang termasuk kedalam fluida non newtonian serta masuk kedalam karakteristik bingham plastic.

- Tensor tegangan fluida sisko [3]:

$$\bar{\bar{\sigma}} = -p\mathbf{I} + \tau \text{ dengan } \tau = \left[a + b \left| \sqrt{\frac{1}{2} (tr(A_1))^2} \right|^{n-1} \right]$$
$$A_1 = L + L^T, \quad L = grad V$$

- Dimana:

$\bar{\bar{\sigma}}$: Tensor tegangan

\mathbf{I} : Tensor identitas

p : tekanan

τ : tegangan geser

n, a, b : Parameter material

A_1 : Tensor Rivlin-Erickson pertama

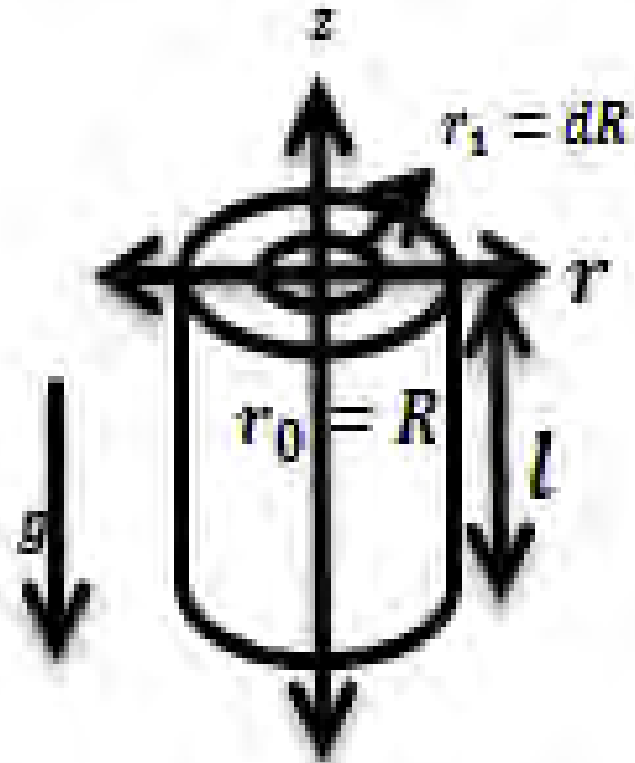
V : Kecepatan, $V = v(r, t)$

T : Temperatur, $T = T(r, t)$



ALIRAN FLUIDA PADA PIPA ANNULUS

Aliran fluida yang dibahas adalah aliran fluida yang mengalir antara pipa dalam dengan jari-jari dR dan pipa luar dengan jari-jari R , sehingga ada atau tidaknya aliran pipa bagian dalam diabaikan. Aliran tersebut mengalir sejajar dengan dinding sehingga $V_r = 0$ dan $V_\theta = 0$.



KOORDINAT POLAR

Tempat kedudukan sebuah titik ditunjukkan oleh koordinat-koordinat r , θ dan z .

r = jarak radial dari sumbu- z

θ = sudut yang diukur dari garis sejajar sumbu- x

z = koordinat sepanjang sumbu- z

Misal pada kecepatan, komponen-komponennya adalah:

v_r = kecepatan radial

v_θ = kecepatan tangensial

v_z = kecepatan aksial

Sehingga kecepatan pada sebuah titik, dinyatakan:

$$\mathbf{V} = V_r \hat{r} + V_\theta \hat{\theta} + V_z \hat{z}$$

gradien dalam koordinat silinder dinyatakan sebagai berikut :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$

divergensi, dalam koordinat silinder dinyatakan sebagai berikut. Jika \mathbf{V} adalah vektor :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

PERSAMAAN ALIRAN FLUIDA

Persamaan Kontinuitas

Fluida disusun oleh molekul-molekul yang bertabrakan satu sama lain.

Persamaan kontinuitas fluida secara umum [4]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

Dengan ρ , \mathbf{V} adalah kerapatan dan kecepatan fluida.

PERSAMAAN ALIRAN FLUIDA

Persamaan Momentum

- Persamaan momentum fluida secara umum [2]:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = K - (\nabla \cdot \bar{\bar{\sigma}})$$

K = Gaya pada fluida

$\bar{\bar{\sigma}}$ = tegangan tensor

t = waktu

Persamaan Distribusi Panas

- Persamaan Distribusi panas fluida secara umum [5]:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q$$

METODE BEDA HINGGA CRANK-NICHOLSON

Metode ini sering digunakan untuk mencari penyelesaian dari persamaan diferensial parsial (PDP). Indeks pertama sebagai variabel ruang dan indeks kedua sebagai variabel waktu.

$$u(r, t) \sim u(i\Delta r, j\Delta t) \sim u_{i,j}$$

Misalkan diberikan suatu persamaan distribusi panas:

$$u_t = ku_{rr} \quad (2.8)$$

dengan k adalah suatu konstanta.

Dengan syarat awal :

$u(r, 0) = U_0$, $r_1 \leq r \leq r_0$ jika r_1 adalah jari-jari silinder dalam dan r_0 adalah jari-jari silinder luar

dan syarat batas :

$u(R, t) = U_1$, $t \geq 0$ jika U_1 adalah konstanta

Bentuk umum persamaan beda hingga pada titik ke j dan $j + 1$ sebagai berikut [6]:

$$\frac{1}{\gamma} \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\delta t} \right) = m \left(\frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\delta x)^2} \right) + (1 - m) \left(\frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1}}{(\delta x)^2} \right)$$

Jika $m = 1$ maka diperoleh skema eksplisit

$$\frac{1}{\gamma} \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\delta t} \right) = \left(\frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\delta x)^2} \right)$$

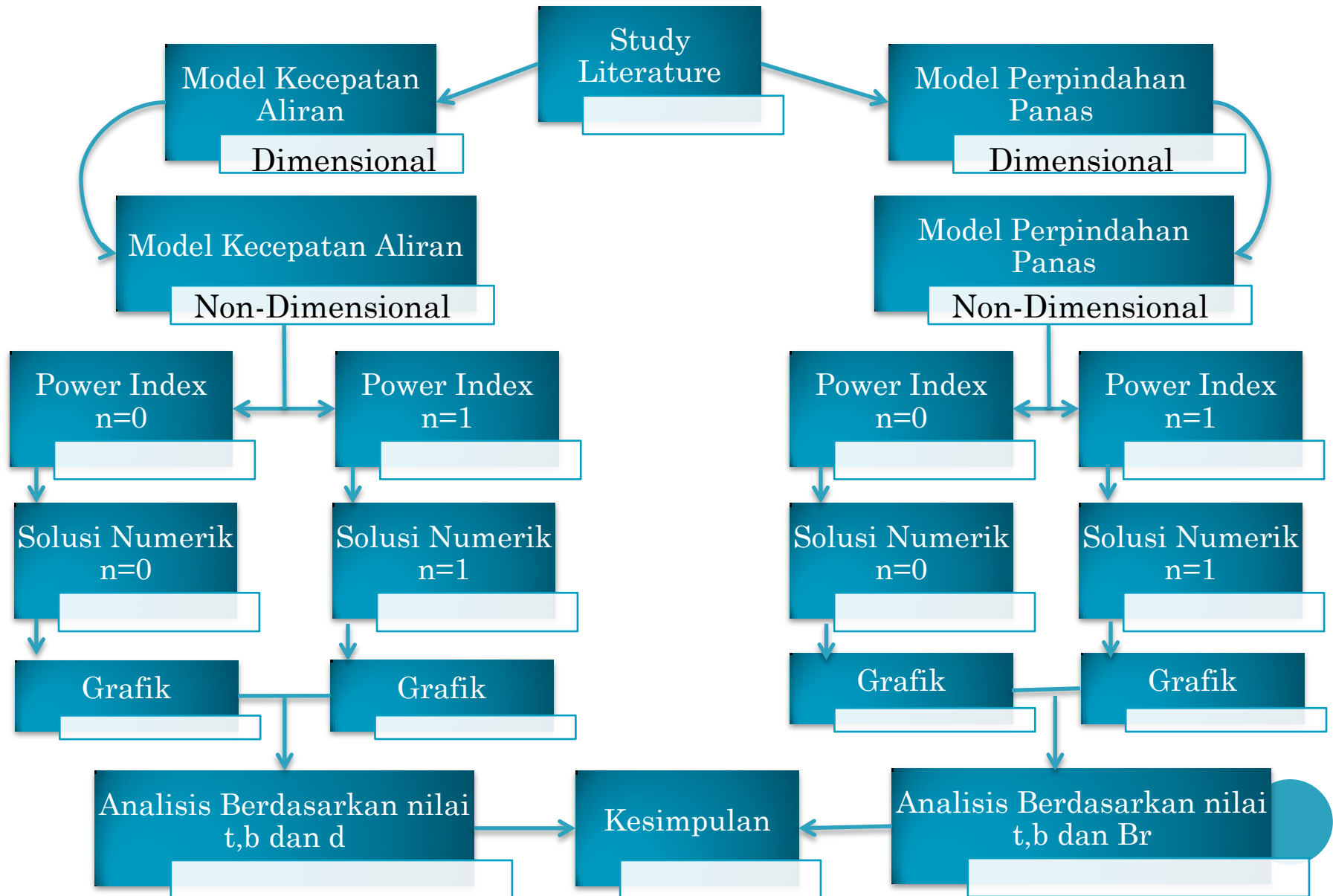
$m = 0$ akan diperoleh skema implisit

$$\frac{1}{\gamma} \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\delta t} \right) = \left(\frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1}}{(\delta x)^2} \right)$$

Sehingga didapat pendekatan skema Crank-Nicholson :

$$\frac{1}{\gamma} \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\delta t} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\delta x)^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1}}{(\delta x)^2} \right)$$

METODOLOGI PENELITIAN



ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Model Kecepatan Aliran

Persamaan Kontinuitas fluida

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

Persamaan
Kontinuitas

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \text{ atau } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

Persamaan Momentum Fluida

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = K - (\nabla \cdot \bar{\bar{\sigma}})$$

Tegangan geser fluida sisko

$$\tau = a \frac{\partial V}{\partial r} + b \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^n$$

Divergensi Tegangan Tensor

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\sigma}} = \frac{-p}{r} + \frac{1}{r} \left(a \frac{\partial V}{\partial r} + b \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^n \right) + a \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + nb \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^{n-2} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{dp}{dz}$$

Persamaan Kecepatan Aliran Fluida
Sisko

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = P_s - \frac{1}{r} \left(a \frac{\partial V}{\partial r} + b \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^n \right) - a \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - nb \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^{n-2} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$$

Dengan $P_s = K + \rho g$

Model Distribusi Panas

$$\begin{aligned}q &= -k \operatorname{grad} T \\ \bar{\bar{\sigma}} &= -p\mathbf{I} + \tau \\ \mathbf{L} &= \operatorname{grad} V\end{aligned}$$

Persamaan Distribusi Panas Fluida

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{L} - \operatorname{div} q$$

Persamaan Distribusi Panas Fluida Sisko

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \left(\left[a + b \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^{n-1} \right] \frac{\partial V}{\partial r} \right) \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

MODEL KECEPATAN ALIRAN DAN DISTRIBUSI PANAS *NON-DIMENSIONAL*

Variabel – variabel *non-Dimensional*

$$\begin{aligned} V &= U_0 V^* , & r &= R r^* , & z &= R z^* , & V(r) &= U_0 V^*(r)^* \\ t &= \left(\frac{\rho R^2}{a} \right) t^* , & b &= a \left(\frac{R}{U_0} \right)^{n-1} b^* , & T &= (T_1 - T_0) T^* + T_0 \\ E_c &= \frac{U_0^2}{c_p (T_1 - T_0)} , & P_r &= \frac{a c_p}{k} , & B_r &= P_r E_c \end{aligned}$$

Model Kecepatan Aliran

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{a} (K + \rho g) - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial r} + b \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^n \right) - \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - n b \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$$

Model Distribusi Panas

$$P_r \frac{\partial T}{\partial t} = \left[1 + b \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^{n-1} \right] B_r \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

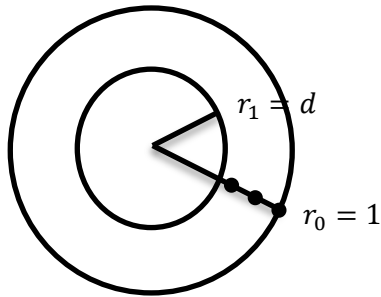
PENYELESAIAN NUMERIK

Akan dibandingkan kecepatan aliran fluida sisko dengan fluida Newtonian pada *power index* $n=0$ dengan $n=1$.

$n=0$



$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{(K - \rho g)}{a} - \frac{b}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$$



Penampang horizontal
pipa Annulus

Fluida sisko hanya mengalir antara fluida dalam dan fluida luar. Maka $r_i = 1 - i\Delta r$, dimana $\Delta r = \frac{1-d}{N}$, untuk pendiskritan sebanyak N

$n=1$



$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{a}(K + \rho g) - \left(\frac{1+b}{r}\right) \frac{\partial V}{\partial r} - (1+b) \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$$

n=0



$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{(K - \rho g)}{a} - \frac{b}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$$

Didapat skema numerik:

$$\left(\frac{2}{\Delta t} p^{*2}\right) V_{i-1,j+1} + \left(1 - p^* q_i - \frac{4}{\Delta t} p^{*2}\right) V_{i,j+1} + \left(p^* q_i + \frac{2}{\Delta t} p^{*2}\right) V_{i+1,j+1} =$$

$$\left(\frac{\Delta t(K + \rho g)}{a} - \Delta t q_i b\right) - \left(\frac{2}{\Delta t} p^{*2}\right) V_{i-1,j} + \left(1 + p^* q_i + \frac{4}{\Delta t} p^{*2}\right) V_{i,j} - \left(p^* q_i + \frac{2}{\Delta t} p^{*2}\right) V_{i+1,j}$$

$$\begin{bmatrix} e_1 & f_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ g & e_2 & f_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & e_3 & f_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & e_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g & e_{n-1} & f_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1,j+1} \\ V_{2,j+1} \\ V_{3,j+1} \\ V_{4,j+1} \\ V_{5,j+1} \\ V_{6,j+1} \\ \vdots \\ V_{n,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 & -f_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -g & h_2 & -f_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g & h_3 & -f_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & h_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -g & h_{n-1} & -f_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1,j} \\ V_{2,j} \\ V_{3,j} \\ V_{4,j} \\ V_{5,j} \\ V_{6,j} \\ \vdots \\ V_{n,j} \end{bmatrix}$$

Dengan:

$$e_i = 1 - p^* q_i - \frac{4p^{*2}}{\Delta t}$$

$$f_i = p^* q_i + \frac{2p^{*2}}{\Delta t}$$

$$g = \frac{2p^{*2}}{\Delta t}$$

$$h_i = 1 + p^* q_i + \frac{4p^{*2}}{\Delta t}$$

$$m_i = \frac{\Delta t(K + \rho g)}{a} - \Delta t q_i b$$

n=1

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} (K + \rho g) - \left(\frac{1+b}{r} \right) \frac{\partial V}{\partial r} - (1+b) \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$$

Didapat skema numerik:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{\Delta t} p^{*2} (1+b) \right) V_{i-1,j+1} + \left(1 - p^* q_i (1+b) - \frac{4}{\Delta t} p^{*2} (1+b) \right) V_{i,j+1} + \\ & \left(p^* q_i (1+b) + \frac{2}{\Delta t} p^{*2} (1+b) \right) V_{i+1,j+1} = \frac{\Delta t}{\alpha} (K + \rho g) - \left(\frac{2}{\Delta t} p^{*2} (1+b) \right) V_{i-1,j} + \\ & \left(1 + p^* q_i (1+b) + \frac{4}{\Delta t} p^{*2} (1+b) \right) V_{i,j} - \left(p^* q_i (1+b) + \frac{2}{\Delta t} p^{*2} (1+b) \right) V_{i+1,j} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} e_1 & f_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ g & e_2 & f_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & e_3 & f_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & e_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g & e_{n-1} & f_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1,j+1} \\ V_{2,j+1} \\ V_{3,j+1} \\ V_{4,j+1} \\ V_{5,j+1} \\ V_{6,j+1} \\ \vdots \\ V_{n,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 & -f_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -g & h_2 & -f_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g & h_3 & -f_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & h_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -g & h_{n-1} & -f_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1,j} \\ V_{2,j} \\ V_{3,j} \\ V_{4,j} \\ V_{5,j} \\ V_{6,j} \\ \vdots \\ V_{n,j} \end{bmatrix}$$

Dengan:

$$e_i = 1 - p^* q_i (1+b) - \frac{4p^{*2}}{\Delta t} (1+b)$$

$$f_i = p^* q_i (1+b) + \frac{2p^{*2}}{\Delta t} (1+b)$$

$$g = \frac{2p^{*2}}{\Delta t} (1+b)$$

$$h_i = 1 + p^* q_i (1+b) + \frac{4p^{*2}}{\Delta t} (1+b)$$

$$m_i = \frac{\Delta t}{\alpha} (K + \rho g)$$

Akan dibandingkan distribusi temperatur fluida sisko dengan fluida Newtonian pada *power index* $n=0$ dan $n=1$.

$n=0$



$$P_r \frac{\partial T}{\partial t} = B_r \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + b B_r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$$

$n=1$



$$P_r \frac{\partial T}{\partial t} = [1 + b] B_r \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$$



$n=0$

$$P_r \frac{\partial T}{\partial t} = B_r \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + b B_r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$$

Didapat skema numerik:

$$\begin{aligned} - \left(\frac{2p^{*2}}{\Delta t P_r} \right) T_{i-1,j+1} + \left(1 + \frac{p^* q_i}{P_r} + \frac{4p^{*2}}{\Delta t P_r} \right) T_{i,j+1} - \left(\frac{p^* q_i}{P_r} + \frac{2p^{*2}}{\Delta t P_r} \right) T_{i+1,j+1} = & \left(\frac{2p^{*2}}{\Delta t P_r} \right) T_{i-1,j} + \\ \left(1 - \frac{p^* q_i}{P_r} - \frac{4p^{*2}}{\Delta t P_r} \right) T_{i,j} + \left(\frac{p^* q_i}{P_r} + \frac{2p^{*2}}{\Delta t P_r} \right) T_{i+1,j} + \frac{p^{*2} B_r}{\Delta t P_r} (V_{i+1,j} - V_{i,j} + V_{i+1,j+1} - V_{i,j+1})^2 + & \\ \frac{b B_r p^*}{P_r} (V_{i+1,j} - V_{i,j} + V_{i+1,j+1} - V_{i,j+1}) & \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} e_1 & f_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ g & e_2 & f_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & e_3 & f_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & e_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g & e_{n-1} & f_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,j+1} \\ T_{2,j+1} \\ T_{3,j+1} \\ T_{4,j+1} \\ T_{5,j+1} \\ T_{6,j+1} \\ \vdots \\ T_{n,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 & -f_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -g & h_2 & -f_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g & h_3 & -f_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & h_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -g & h_{n-1} & -f_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,j} \\ T_{2,j} \\ T_{3,j} \\ T_{4,j} \\ T_{5,j} \\ T_{6,j} \\ \vdots \\ T_{n,j} \end{bmatrix}$$

Dengan:

$$e_i = 1 + \frac{p^* q_i}{P_r} + \frac{4p^{*2}}{\Delta t P_r}$$

$$f_i = - \left(\frac{p^* q_i}{P_r} + \frac{2p^{*2}}{\Delta t P_r} \right)$$

$$g = - \left(\frac{2p^{*2}}{\Delta t P_r} \right)$$

$$h_i = 1 - \frac{p^* q_i}{P_r} - \frac{4p^{*2}}{\Delta t P_r}$$

$$\begin{aligned} m_i = & \frac{p^{*2} B_r}{\Delta t P_r} (V_{i+1,j} - V_{i,j} + V_{i+1,j+1} - V_{i,j+1})^2 + \\ & \frac{b B_r p^*}{P_r} (V_{i+1,j} - V_{i,j} + V_{i+1,j+1} - V_{i,j+1}) \end{aligned}$$

n=1



$$P_r \frac{\partial T}{\partial t} = [1 + b] B_r \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$$

Didapat skema numerik:

$$-\left(\frac{2p^{*2}}{\Delta t P_r}\right) T_{i-1,j+1} + \left(1 + \frac{p^* q_i}{P_r} + \frac{4p^{*2}}{\Delta t P_r}\right) T_{i,j+1} - \left(\frac{p^* q_i}{P_r} + \frac{2p^{*2}}{\Delta t P_r}\right) T_{i+1,j+1} = \left(\frac{2p^{*2}}{\Delta t P_r}\right) T_{i-1,j} + \left(1 - \frac{p^* q_i}{P_r} - \frac{4p^{*2}}{\Delta t P_r}\right) T_{i,j} + \left(\frac{p^* q_i}{P_r} + \frac{2p^{*2}}{\Delta t P_r}\right) T_{i+1,j} + \frac{[1+b] B_r p^{*2}}{\Delta t P_r} (V_{i+1,j} - V_{i,j} + V_{i+1,j+1} - V_{i,j+1})^2$$

$$\begin{bmatrix} e_1 & f_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ g & e_2 & f_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & e_3 & f_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & e_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g & e_{n-1} & f_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,j+1} \\ T_{2,j+1} \\ T_{3,j+1} \\ T_{4,j+1} \\ T_{5,j+1} \\ T_{6,j+1} \\ \vdots \\ T_{n,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 & -f_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -g & h_2 & -f_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g & h_3 & -f_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & h_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -g & h_{n-1} & -f_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,j} \\ T_{2,j} \\ T_{3,j} \\ T_{4,j} \\ T_{5,j} \\ T_{6,j} \\ \vdots \\ T_{n,j} \end{bmatrix}$$

Dengan:

$$e_i = 1 + \frac{p^* q_i}{P_r} + \frac{4p^{*2}}{\Delta t P_r}$$

$$f_i = -\left(\frac{p^* q_i}{P_r} + \frac{2p^{*2}}{\Delta t P_r}\right)$$

$$g = -\left(\frac{2p^{*2}}{\Delta t P_r}\right)$$

$$h_i = 1 - \frac{p^* q_i}{P_r} - \frac{4p^{*2}}{\Delta t P_r}$$

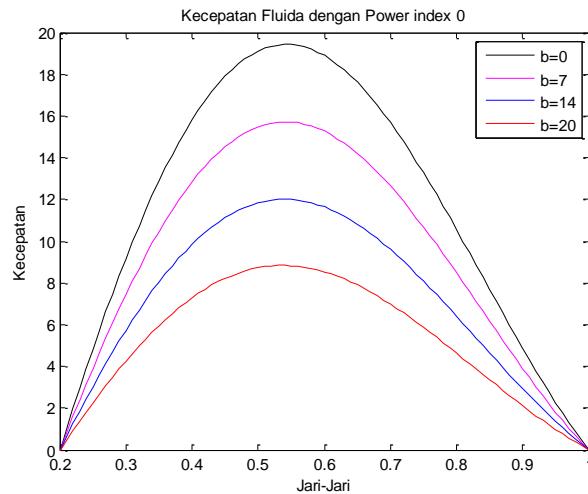
$$m_i = \frac{[1 + b] B_r p^{*2}}{\Delta t P_r} (V_{i+1,j} - V_{i,j} + V_{i+1,j+1} - V_{i,j+1})^2$$

SIMULASI KECEPATAN ALIRAN FLUIDA

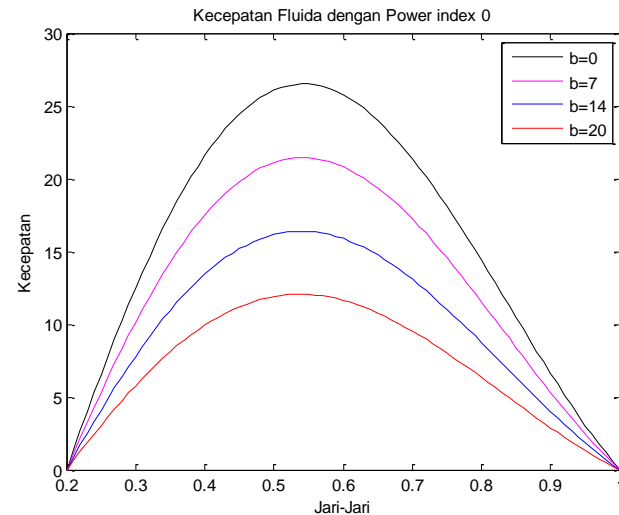
Selanjutnya, akan dibandingkan besar kecepatan antara fluida sisko dan fluida Newtonian pada *power index* $n = 0$ dan $n = 1$. Perbandingan tersebut juga ditunjukkan pada variasi waktu, dan jari-jari pipa bagian dalam.



fluida untuk *power index* $n = 0$



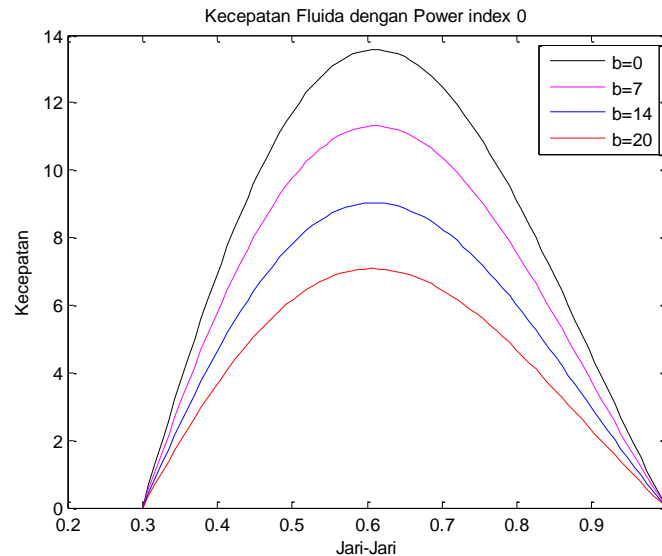
Gambar 3.2 Distribusi kecepatan aliran dengan *power index* $n = 0, t = 3, d = 0.2$



Gambar 3.3 Distribusi kecepatan aliran dengan *power index* $n = 0, t = 5, d = 0.2$

Berdasarkan grafik (3.2) dan (3.3)

1. Semakin besar nilai t , maka kecepatan fluida semakin besar.
2. Semakin dekat aliran fluida dengan dinding pipa, aliran fluida akan semakin menurun.
3. Semakin besar nilai b , besar kecepatan akan semakin kecil. Dengan demikian, pada *power index* $n = 0$, kecepatan fluida sisko lebih kecil daripada fluida Newtonian.



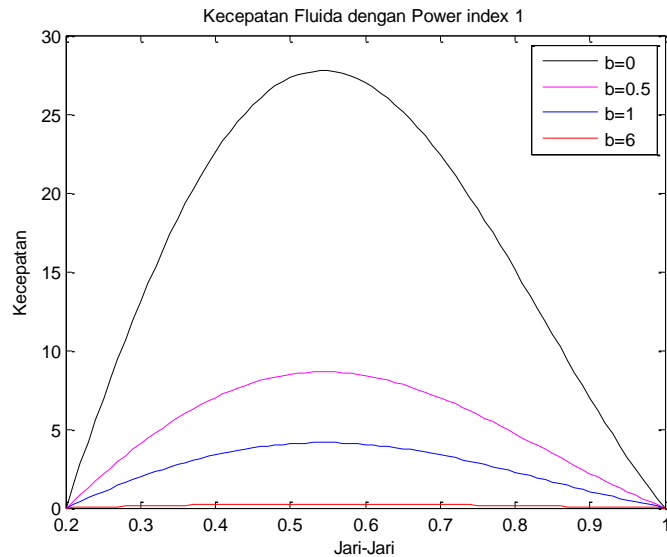
Gambar 3.4 Distribusi kecepatan aliran dengan *power index* $n = 0$, $t = 5$, $d = 0.3$

Grafik (3.3) dan (3.4), menunjukkan bahwa kecepatan aliran juga dipengaruhi oleh panjangnya jari-jari antara pipa dalam dan pipa luar. Semakin kecil jarak kedua pipa, kecepatan aliran akan semakin kecil.

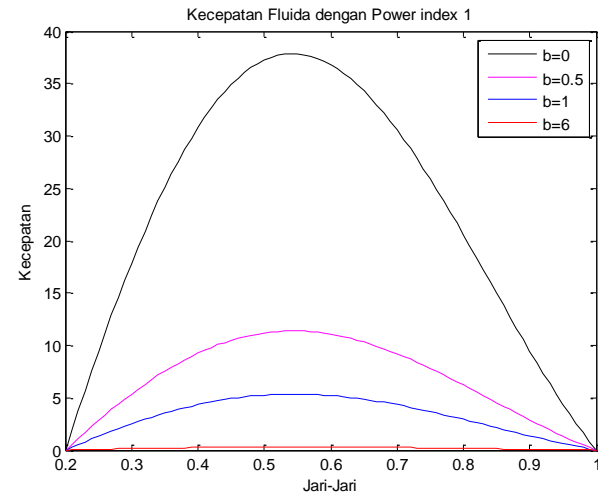
Jadi, disimpulkan kecepatan aliran fluida dengan power index $n = 0$ dipengaruhi waktu yang ditentukan, parameter material dan jarak jari-jari antara kedua pipa.



fluida untuk *power index* $n = 1$

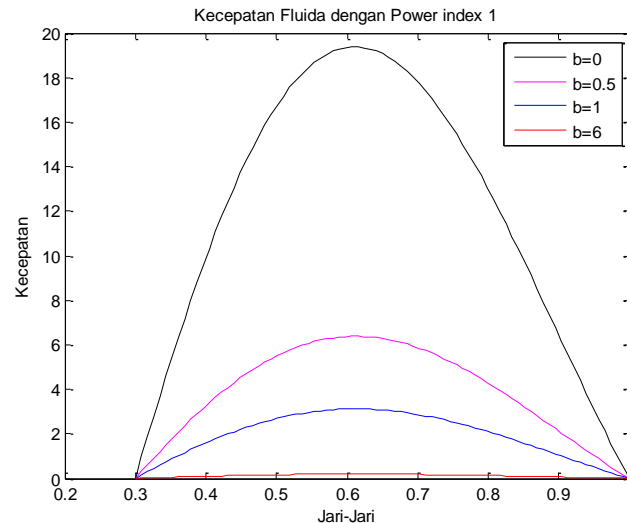


Gambar 3.5 Distribusi kecepatan aliran dengan *power index* $n = 1, t = 3, d = 0.2$



Gambar 3.6 Distribusi kecepatan aliran dengan *power index* $n = 1, t = 5, d = 0.2$





Gambar 3.7 Distribusi kecepatan aliran dengan *power index*
 $n = 1, t = 5, d = 0.3$

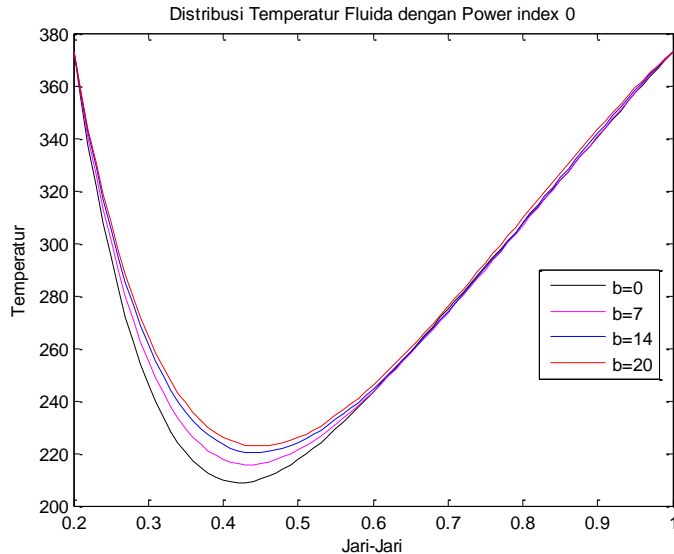
Pada gambar (3.5) sampai (3.7) menunjukkan hasil yang hampir sama dengan *power index* $n = 0$. Untuk nilai $b = 0$ kecepatannya lebih tinggi dari pada $b = 1, 3, 5$. Sehingga dapat disimpulkan kecepatan fluida sisko lebih kecil daripada fluida Newtonian pada *power index* $n = 0$ dan $n = 1$.

SIMULASI DISTRIBUSI TEMPERATUR FLUIDA

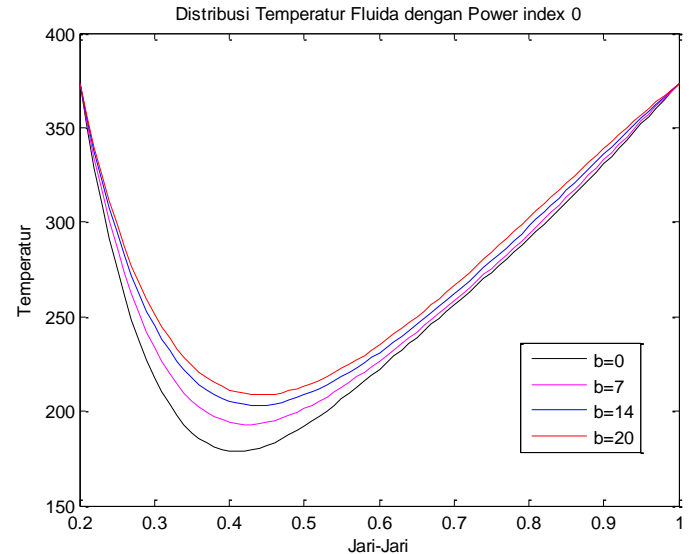
Selanjutnya, akan dibandingkan besar distribusi temperatur antara fluida sisko dan fluida Newtonian pada *power index* $n = 0$ dan $n = 1$. Perbandingan tersebut juga ditunjukkan pada variasi waktu, dan bilangan Brinkman.



fluida untuk *power index* $n = 0$



Gambar 3.8 Distribusi temperatur aliran dengan *power index* $n = 0, t = 3, Br = 1$



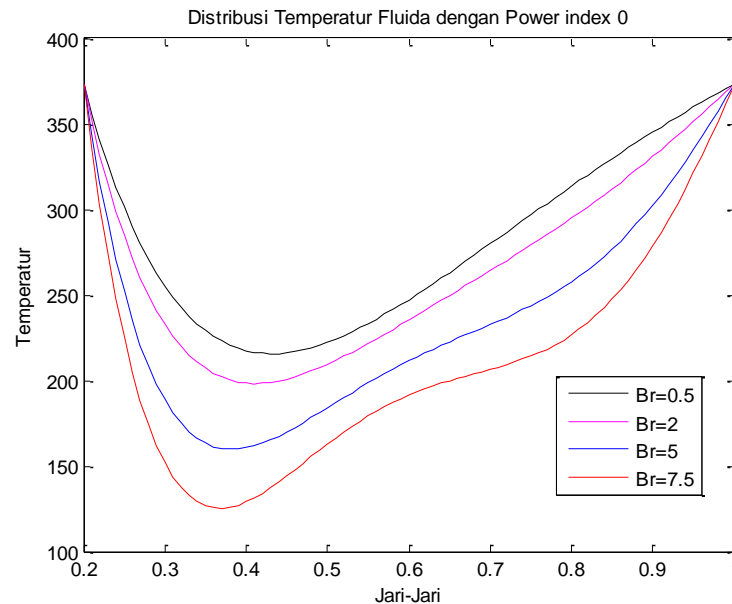
Gambar 3.9 Distribusi temperatur aliran dengan *power index* $n = 0, t = 5, Br = 1$

Pada gambar (3.8) dan (3.9) menunjukkan bahwa

1. Temperatur tertinggi terjadi pada dinding pipa.
2. Semakin besar nilai t , temperaturnya semakin kecil.
3. Semakin besar nilai parameter material b , temperaturnya semakin besar.



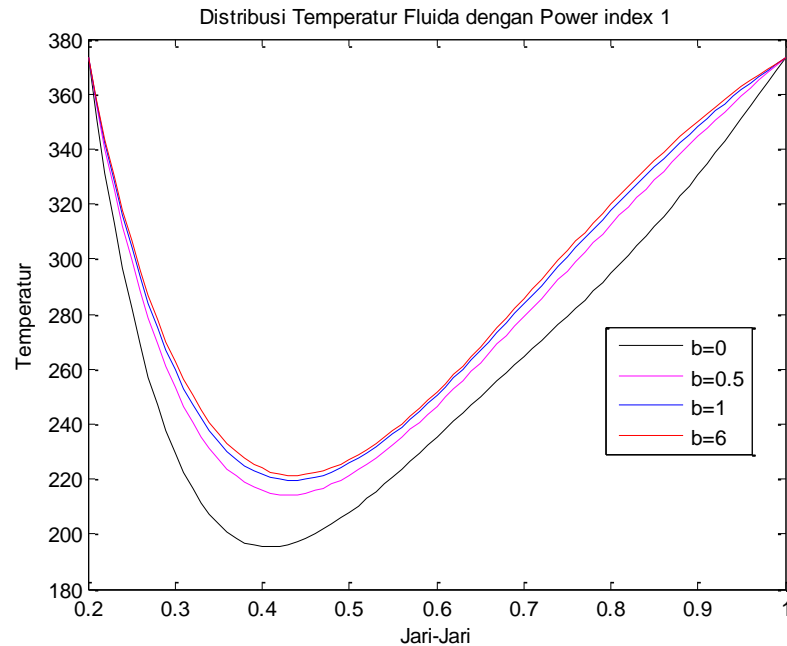
Gambar (3.10),diberikan nilai bilangan Brinkman yang berbeda. Hasilnya menunjukkan bahwa semakin besar bilang Brinkman, distribusi temperatur fluida semakin kecil.



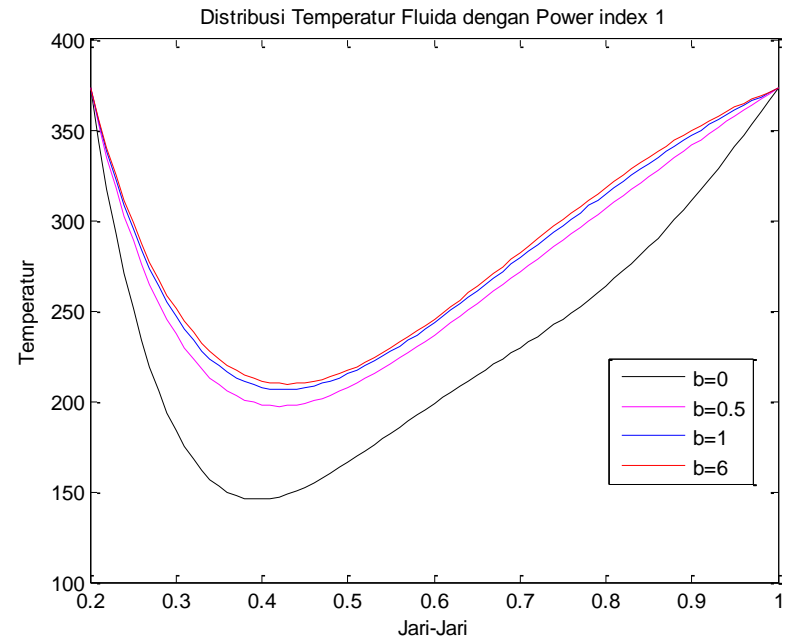
Gambar 3.10 Distribusi temperatur aliran dengan *power index* $n = 0, t = 3, b = 0.2$

Jadi, disimpulkan bahwa distribusi temperatur aliran fluida sisko dengan *power index* $n = 0$ dipengaruhi oleh waktu yang ditentukan, parameter material dan bilangan Brinkman.

fluida untuk *power index* $n = 1$

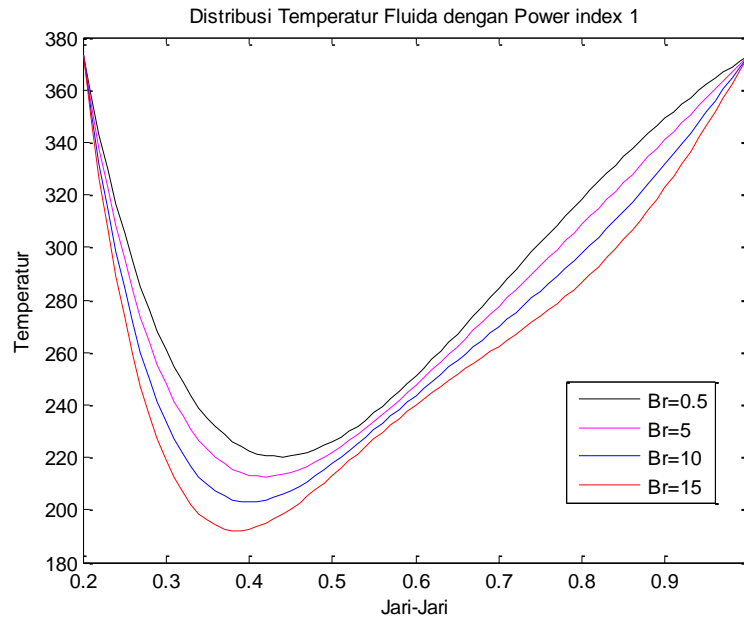


Gambar 3.11 Distribusi temperatur aliran dengan *power index* $n = 1, t = 3, Br = 1$



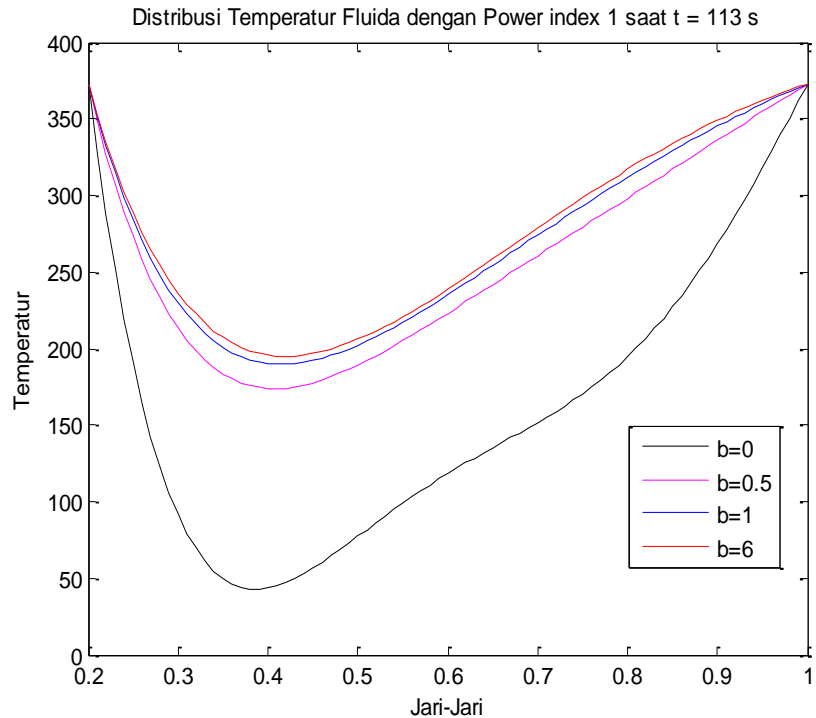
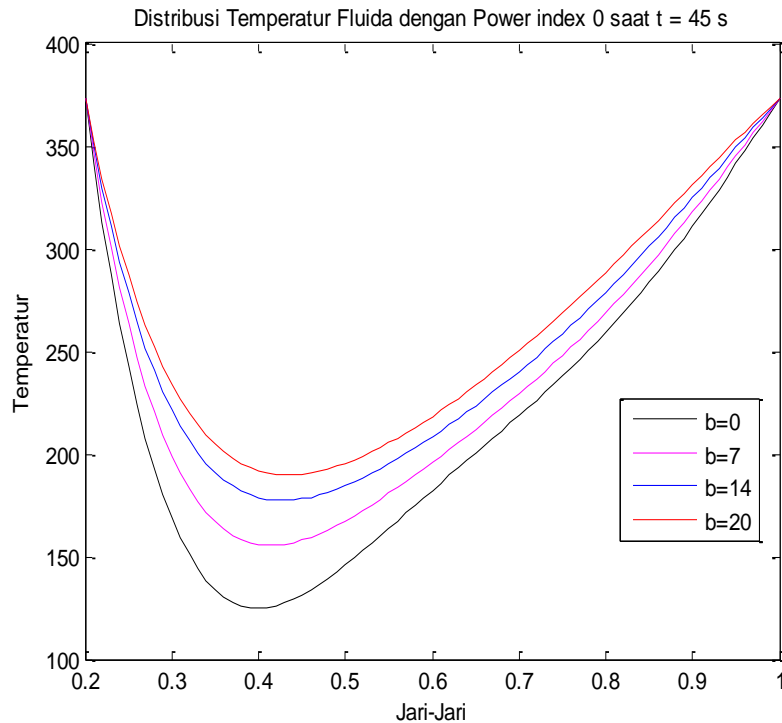
Gambar 3.12 Distribusi temperatur aliran dengan *power index* $n = 1, t = 5, Br = 1$





Gambar 3.13 Distribusi temperatur aliran dengan *power index* $n = 1, t = 3, b = 0$

Berdasarkan gambar (3.13), dapat disimpulkan bahwa dengan semakin besar bilangan Brinkman temperatur fluida sisko dan fluida Newtonian lebih kecil.



Gambar 3.14 Distribusi temperatur aliran dengan *power index* $n = 0$, $t = 45$, $Br = 1$

Gambar 3.15 Distribusi temperatur aliran dengan *power index* $n = 1$, $t = 113$, $Br = 1$

Semakin besar nilai t , kecepatan dan temperatur kedua fluida semakin stabil.

1. Pada fluida dengan *power index* $n = 0$, nilai t akan stabil terjadi pada $t = 45$.
2. Pada fluida pada *power index* $n = 1$ mencapai nilai stabil pada $t = 113$.



KESIMPULAN

Dari grafik,
disimpulkan bahwa

1. Tegangan geser pada fluida sisko mempunyai pengaruh yang sangat besar. Karena tegangan gesernya semakin kecil, menyebabkan pada *power index* $n = 0$ dan $n = 1$, kecepatan fluida sisko lebih kecil daripada fluida Newtonian. Sebaliknya, temperatur fluida sisko lebih besar daripada fluida Newtonian.
2. Semakin besar waktu yang diberikan pada kedua *power index* mengakibatkan kecepatannya semakin besar, sedangkan temperaturnya semakin kecil. Hal ini juga disebabkan karena adanya tegangan geser yang semakin lama semakin kecil.
3. Temperatur fluida juga dipengaruhi oleh bilangan Brinkman. Semakin besar bilangan Brinkman, temperatur fluida sisko dan Newtonian semakin kecil untuk $Br > 0$.

SARAN

Dari hasil yang sudah dicapai, penulis mengusulkan beberapa saran yang dapat digunakan untuk penyelesaian selanjutnya.

1. Pada Tugas Akhir ini menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson. Dalam penelitian selanjutnya dapat digunakan metode numerik lainnya. Sehingga diperoleh metode mana yang lebih sesuai.
2. Hasil dari Tugas Akhir ini hanya menggunakan hasil numerik. Untuk mengetahui seberapa besar *error*, diperlukan perhitungan secara analitik.
3. Pada Tugas akhir ini diasumsikan bahwa tidak ada pengaruh panas dari luar, selanjutnya dapat dikembangkan jika terdapat pengaruh panas dari luar fluida.



DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Nirmalasari, N.A. 2011. "*Analisis Aliran dan Perpindahan Panas Fluida Sisko dalam Keadaan Stedi*". Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- [2]. Radhika, T.S.L, Aditya V.H. 2012. "*Application of Optimal Homotopy Asymptotic Method for Non-Newtonian Fluid Flow In A Vertical Annulus*". Proceedings of the International Multi Conference of Engineers and Computer Scientists 2012 Vol II. Hongkong
- [3]. Khan, M. et. al. 2010. "*Steady Flow and Heat Transfer of a Sisko Fluid In Annular Pipe*". Journal of Heat and Mass Transfer. 53: 1290-1297. Departmen of Mathematics, Pakistan. .
- [4]. Krause, E. 2005. "*Fluid Mechanics*". Germany : Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [5]. Lienhard V, John H. 2005. "*A Heat Transfer Textbook*". University of Houston. USA
- [6]. Fadugba, S. E, dkk. 2013. "*Crank-Nicolson Method for Solving Parabolic Partial Differential Equations*". *International Journal of Applied Mathematics and Modeling IJA2M*. Vol. 1, No. 3, Hal. 8-23.
- [7]. Widodo, B. 2005. "*Free Surface Fluid Flows Induced By A Submerged Sink In a Three Layer Fluid Under The Effects of Surface Tension*". Proc. The International Conference on Applied Mathematics 2005, ITB Bandung, 22-26August 2005.

**Terima
Kasih**

